

## Varianta 10

### Subiectul I

- a)  $d(A, B) = 4\sqrt{5}$ .
- b)  $\cos^2 2007 + \sin^2 2007 = 1$ .
- c) Partea reală este egală cu 2.
- d)  $d = 5\sqrt{2}$ .
- e)  $a = 2, b = -9$ .
- f)  $S_{ABC} = \frac{15}{2}$ .

### Subiectul II

1.

- a)  $\begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 0$ .
- b) Există 3 funcții cu proprietatea cerută.
- c)  $x = 2$ .
- d)  $1 + 11 + 21 + 31 + \dots + 101 = 561$ .
- e)  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in G_f$ .

2.

- a)  $f'(x) = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$ .
- b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$ .
- c)  $x = 1$  este punct de minim local.
- d) Ecuația asimptotei verticale este  $x = 0$ .
- e)  $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^3}{3} + \frac{5}{3}$ .

### Subiectul III

- a)  $f = X^2 + 2X - 15 = (X + 5)(X - 3)$  rezultă cățul este  $X + 5$  și restul este 0.
- b)  $x = -5$  sau  $x = 3$ .
- c)  $\det A = 1 - 16 = -15 \neq 0$ .
- d)  $x = y = 0$ .

e)  $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}.$

f) Prin calcul direct avem  $f(A) = O_2.$

g) Vom demonstra  $P(n): (A + B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Verificare:  $P(1)$ : adevărată.

Presupunând că  $P(k)$  este adevărată pentru  $k \in \mathbf{N}^*$ , arătăm că  $P(k+1)$  este adevărată.

$$(A+B)^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci  $P(k+1)$  este adevărată.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că  $\forall n \in \mathbf{N}^*, (A+B)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

#### Subiectul IV

a)  $a_1 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$

b) Din  $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} = 1 - \frac{1}{(n+1)^3}.$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^3} \right) = 1.$

d)  $a_{n+1} - a_n = f(n+1) = \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} > 0$ , deci șirul  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  este crescător.

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 - 0 = 0 \Rightarrow y = 0$  este ecuația asimptotei către  $+\infty$ .

f)  $\int_1^2 \left( f(x) + \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = \left. \frac{-1}{2x^2} \right|_1^2 = \frac{3}{8}.$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \int_1^n \left( f(x) + \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx - \frac{1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \left. \frac{-1}{2x^2} \right|_1^n - \frac{1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{2n^2} = -\frac{1}{2}.$